

## Paper Code : 10508

2090

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2023

(Three-year Degree Course)

(New Course)

MATHEMATICS

Paper II

(Complex Analysis)

Time : Three Hours | Max. Marks.: { B.A.: 50  
B.Sc.: 55

Note : Attempt all sections as directed.

निर्देशानुसार सभी खण्डों के उत्तर दीजिये।

Section-A / खण्ड-अ

(Long Answer Type Questions) 30/30

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Attempt all the three questions. All questions carry equal marks.

सभी तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) Show that if the points  $z_1, z_2, z_3, z_4$  taken in order are concyclic then the expression

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$
 is purely real.

(1)

P.T.O.

सिद्ध कीजिए यदि बिन्दु  $z_1, z_2, z_3, z_4$  एक चक्रीय क्रम में लिए गए हैं तब व्यंजक  $\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$  शुद्ध वास्तविक होगा।

(b) Show that  $\arg z + \arg \bar{z} = 2n\pi$  where  $n$  is an integer or zero.

सिद्ध कीजिए  $\arg z + \arg \bar{z} = 2n\pi$  जहाँ  $n$  एक पूर्णांक या शून्य है।

OR/अथवा

(a) Prove that the function  $|z|^2$  is continuous every where but nowhere differentiable except at the origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन  $|z|^2$  सर्वत्र सतत है किन्तु मूल बिन्दु के अतिरिक्त कहीं भी अवकलित नहीं है।

(b) Show that an analytic function with constant modulus is constant.

सिद्ध कीजिए कि अचर मापांक वाला विश्लेषित फलन अचर होता है।

2. Define 'Bilinear Transformation'. Show that every bilinear transformation maps circles or straight lines into circles or straight lines.

10508-2090

(2)

द्विरेखिक रूपान्तरण की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि द्विरेखिक रूपान्तरण, वृत्तों एवं सरल रेखाओं को वृत्तों या सरल रेखाओं में प्रतिचित्रित करता है।

**OR/अथवा**

If  $f(z)$  is analytic over and inside a closed contour  $c$ , and  $a$  is any point inside  $c$ , then show that  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz$

Also extend above formula for multi-connected region.

यदि  $f(z)$  एक संवृत कन्टूर  $c$  के अन्दर तथा ऊपर विश्लेषित हो तथा  $a, c$  के अन्दर एक बिन्दु हो तो दर्शाइए कि

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

उपर्युक्त सूत्र का बहुसम्बंधित क्षेत्र के लिए विस्तार कीजिए।

3. (a) State and prove Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय कथन सहित सिद्ध कीजिए।

(b) Expand in the series of the function

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \text{ in the regions.}$$

निम्नांकित फलन का श्रेणी के रूप में विस्तार कीजिए।

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \text{ क्षेत्र में}$$

10508-2090

(3)

P.T.O.

$$(i) |z| < 1$$

$$(ii) 1 < |z| < 2$$

$$(iii) |z| > 2$$

**OR/अथवा**

(a) Define Radius of convergence of power series. Find radius of convergence of the following series.

$$1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b \cdot (b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)} z^2 + \dots$$

घात श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या की परिभाषा दीजिए।

निम्नलिखित घात श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

$$1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b \cdot (b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)} z^2 + \dots$$

(b) Define 'Harmonic Function'. Prove that  $u = \cos x \cos hy$  is a harmonic function and find its harmonic conjugate.

प्रसंवादी फलन की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए

कि फलन  $u = \cos x \cos hy$  प्रसंवादी फलन है तथा

प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

10508-2090

(4)

**Section-B / खण्ड-ब**

**(Short Answer Type Questions)**

( लघु उत्तरीय प्रश्न )

4. Attempt any five questions. All questions carry equal marks. 15/20

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(i) Real and imaginary parts of an analytic function satisfy Laplace equation.

विश्लेषित फलन के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

(ii) Find the radius convergence of the power series  $\sum \frac{z^n}{z^n + 1}$ .

घात श्रेणी  $\sum \frac{z^n}{z^n + 1}$  की वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(iii) Expand  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  in a Laurent's series for the region  $1 < |z| < 3$ .

$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$  का लारेन्ट श्रेणी में क्षेत्र  $1 < |z| < 3$  के लिए विस्तार कीजिए।

10508-2090

(5)

P.T.O.

(iv) Find singularities of  $f(z) = \tan \frac{1}{z}$

फलन  $f(z) = \tan \frac{1}{z}$  की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए।

(v) Prove that all roots of :

$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$  lies between the circles  $|z|=1$ , and  $|z|=2$

सिद्ध कीजिए कि :

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

के सभी मूल वृत्तों  $|z|=1$  और  $|z|=2$  के बीच स्थिति हैं।

(vi) Evaluate  $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(vii) Prove that  $\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx = \pi$

सिद्ध कीजिए  $\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx = \pi$

(viii) Define 'Analytic continuation' with an example.

विश्लेषिक की 'सातत्य' की उदाहरण सहित परिभाषा दीजिए।

10508-2090

(6)

**Section-C / खण्ड-स**  
**(Objective Type Questions)**  
**( वस्तुनिष्ठ प्रश्न )**

5. Attempt all questions.

5/5

सभी प्रश्न हल कीजिए।

(i)  $\text{Amp.} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = \text{constant}$

- (a) A straight line ✓
- (b) A parabola
- (c) A circle
- (d) An ellipse

मापांक  $\left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = \text{अचर है।}$

- (अ) एक सरल रेखा
- (ब) एक परवलय
- (स) एक वृत्त
- (द) एक दीर्घवृत्त

(ii) If  $z=a$  is inside  $C$  then  $\int_C \frac{dz}{z-a} =$

यदि  $z=a$ ,  $C$  की अचर हो तब  $\int_C \frac{dz}{z-a} =$

(a) 0

(b)  $\pi i$

(c)  $2\pi i$  ✓

(d) 1

10508-2090

(7)

P.T.O.

(iii)  $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$  has pole at .....

$f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$  का ..... पर अनन्तक होगा।

(a)  $z = \pi/2$

(b)  $z = -\pi/2$

(c)  $z = \pi$

(d)  $z = \pi/4$  ✓

(iv) Residue of  $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$  at  $z=i$  is :

$\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$  का अवशिष्ट  $z=i$  पर है।

(a)  $3i$

(b)  $3i/16$

(c)  $3/16i$

(d)  $i$

(v) For four points there are \_\_\_\_\_ distinct cross ratios

चार बिन्दुओं के लिए ..... विभिन्न प्रकार की वज्रानुपात होंगे।

(a) 24

(b) 6

(c) 8

(d) 4 ✓

10508-2090

(8)