

Total No. of Questions : 5 [Total No. of Printed Pages : 8

**Paper Code : 10507**

**2089**

**B.A./B.Sc. (Part III) Examination, 2019**  
**(Three-year Degree Course)**

**(New Course)**

**MATHEMATICS**

**Paper-I**

**(Real Analysis)**

Time : 3 Hours ] [Maximum Marks : {B.A. : 50  
B.Sc. : 55

**Note :-** Attempt all Sections as directed.

निर्देशानुसार सभी खण्डों को हल कीजिए।

**Section-A**

**(खण्ड-अ)**

**Long Answer Type Questions 10 each**

**(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

**Note :-** Attempt all the three questions.

सभी तीन प्रश्नों को हल कीजिए।

**SB-96**

**( 1 )**

**Turn Over**

1. Prove that the intersection of a finite collection of open sets is open.

सिद्ध कीजिए कि खुले समुच्चयों का प्रतिच्छेदन खुला समुच्चय होता है।

*Or*

**(अथवा)**

Let  $(X, d)$  be a metric space and let  $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ , then  $d_1$  is a metric for  $X$ .

माना कि  $(X, d)$  एक मेट्रिक स्पेस है तथा  $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ . तब दिखाइए कि  $d_1$  एक  $X$  पर मेट्रिक है।

2. Prove that the sequence  $\langle a_n \rangle$  defined by  $a_1 = \sqrt{7}$ ,

$a_{n+1} = \sqrt{7+a_n}$  converges to the positive root of the equation  $x^2 - x - 7 = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी  $\langle a_n \rangle$ ,  $a_1 = \sqrt{7}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{7+a_n}$

द्वारा परिभाषित, समीकरण  $x^2 - x - 7 = 0$  के धनात्मक मूल से अभिसरित होता है।

*Or*

**(अथवा)**

State and prove Taylor's theorem for two variables.

दो चर राशि के लिए टेलर की प्रमेय को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

**SB-96**

**( 2 )**

3. State and prove Darboux theorem for Reimann Integral.

रीमन समाकलन के लिए डारबोक्स प्रमेय बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

Or  
(अथवा)

Test the convergence of integral :

$$\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$$

समाकलन  $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$  के लिए अभिसारी परीक्षण कीजिए।

Section-B  
(खण्ड-ब)

Short Answer Type Questions 3/4 each

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4. Attempt any five questions. All questions carry equal marks. http://www.mjpruonline.com

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(i) State and prove Weierstrass M-Test.

वाइएस्ट्रास M-परीक्षण बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

SB-96

( 3 )

Turn Over

(ii) Show that greatest integer function  $f(x) = [x]$  is integrable on  $[0, 4]$  and  $\int_0^4 [x] dx = 6$ .

दिखाइए कि महतम पूर्णांक फलन  $f(x) = [x]$   $[0, 4]$  में समाकलित है तथा  $\int_0^4 [x] dx = 6$ .

(iii) Find the maximum value of  $u$  where  $u = \sin x \sin y \sin (x + y)$ .

$u = \sin x \sin y \sin (x + y)$  का महतम मान ज्ञात कीजिए।

(iv) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not continuous at  $(0, 0)$

दिखाइए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$  पर सतत् नहीं है।

SB-96

( 4 )

(v) Show that :

$$\int_b^a \left( \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right) dx = \log \left( \frac{b}{a} \right)$$

दिखाइए कि :

$$\int_b^a \left( \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right) dx = \log \left( \frac{b}{a} \right)$$

(vi) Prove that every Cauchy sequence in  $\mathbb{R}$  is convergent.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कॉपी अनुक्रम  $\mathbb{R}$  में अभिसारी है।

(vii) Test the convergence of  $\int_b^a \frac{\sin x}{x} dx$ .

समाकलन  $\int_b^a \frac{\sin x}{x} dx$  के लिए अभिसारी परीक्षण

कीजिए।

(viii) Define Neighbourhood of a point.

बिन्दु के क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

SB-96

( 5 )

Turn Over

Section-C

(छण्ड-स)

Objective Type Questions

1 each

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5. Answer all parts of this question, choosing the correct option.

इस प्रश्न के सभी भाग सही विकल्प का चयन करते हुए हल कीजिए।

(i) The supremum of the set  $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  is :

- (a) 1 (b) 0  
(c) -1 (d) None of these

समुच्चय  $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  का सुप्रीमम है :

- (अ) 1 (ब) 0  
(स) -1 (द) इनमें से कोई नहीं

(ii) If A and B are subsets of a metric space  $(X, d)$ , then :

- (a)  $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$   
(b)  $(A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$   
(c)  $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$   
(d) None of these

B-96

( 6 )

यदि A तथा B मिट्रिक स्पेस (X, d) के उपसमुच्चय हैं  
तब :

(अ)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$

(ब)  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$

(स)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(द) इनमें से कोई नहीं

(iii) The points at which  $f(x) = [x]$  is continuous  
are :

(a) Set of all rational points

(b) Set of all irrational points

~~(c)~~ Set of all integral points

~~(d)~~ None of these

फलन  $f(x) = [x]$  के बिन्दुओं पर असतत् है :

(अ) सभी परिमेय बिन्दुओं का समुच्चय

(ब) सभी अपरिमेय बिन्दुओं का समुच्चय

(स) सभी पूर्णांक बिन्दुओं का समुच्चय

(द) इनमें से कोई नहीं

SB-96

( 7 )

(iv) If  $f(x) = x$  in  $[0, 1]$  and  $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$  be a  
partition of  $[0, 1]$  then  $U(P, f)$  is equal to :

(a) 0 (b)  $\frac{1}{3}$

~~(c)~~  $\frac{2}{3}$  (d) 1

यदि  $[0, 1]$  में  $f(x) = x$  तथा  $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$   $[0, 1]$   
का विभाजन है तब  $U(P, f)$  का मान है :

(अ) 0 (ब)  $\frac{1}{3}$

(स)  $\frac{2}{3}$  (द) 1

(v) If the set  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ , then the  
derived set of A is :

~~(a)~~ {1} (b) {0}

(c) Q (द) None of these

यदि समुच्चय  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ , तब A का  
द्वितीय समुच्चय है :

(अ) {1} (ब) {0}

(स) Q (द) इनमें से कोई नहीं

SB-96

( 8 )