Total No. of Questions : 8] [Total No. of Printed Pages : 15

Paper Code : 10508

2090

B.A./B.Sc. (Part III) Examination, 2020

(Three-year Degree Course)

(New Course)

MATHEMATICS

Paper–II

(Complex Analysis)

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : B.A. : 50, B.Sc. : 55

Note :– Attempt all Sections as directed.
निर्देशानुसार सभी खण्डों के उत्तर दीजिए।

Section–A

(खण्ड–अ)

Long Answer Type Questions 10 each

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note :– Attempt any *three* questions. All questions carry equal marks.
किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) Prove that continuity is a necessary but not a sufficient condition for the existence of a finite derivative.

सिद्ध कीजिए कि एक सीमित अवकलन के घटित होने के लिए सततता एक आवश्यक प्रतिबंध है, परन्तु यह पर्याप्त नहीं हो सकती।

(b) Prove that the function $|z|^2$ is continuous every where but nowhere differentiable except at origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $|z|^2$ हर जगह सतत् है, परन्तु मूलबिन्दु के अतिरिक्त कहीं और अवकलित नहीं है।

(c) Find the radii of convergence of the power series :

$$\sum \frac{\underline{|n}}{n^n} z^n$$

घात श्रेणी $\sum \frac{\underline{|n}}{n^n} z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. (a) State and prove Morera's theorem for a continuous function in a simply connected domain D.

एक सरल सम्बन्धित डोमेन D में सतत् फलन के लिए मोरेरा प्रमेय को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

(b) Evaluate $\int_C \frac{1}{(z-z_0)^2} dz$, where z_0 is any point within C.

ज्ञात कीजिए $\int_C \frac{1}{(z-z_0)^2} dz$, जहाँ z_0, C के अन्तर्गत कोई बिन्दु है।

3. (a) Discuss the application of the transformation $w = z^2$ to the area in the first quadrant of z plane bounded by the axes and the circle $|z| = a$, $|z| = b$ $(a > b > 0)$. Is the transformation conformal ?

अक्षों तथा वृत्तों $|z| = a$, $|z| = b$ $(a > b > 0)$ द्वारा बन्धित z समतल के प्रथम चतुर्थांश में प्रतिचित्रण $w = z^2$ की अनुप्रयोगिता समझाइए। क्या यह प्रतिचित्रण कन्फोर्मल है ?

(b) Find the fixed points and the normal form of the bilinear transformation $w = \frac{z}{2-z}$. Also discuss the nature of transformation.

द्विरैखिक प्रतिचित्रण $w = \frac{z}{2-z}$ के नियत बिन्दु तथा लम्बवत् रूप निकालिए तथा प्रतिचित्रण की प्रकृति भी समझाइए।

4. (a) Find the residues of $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ at all its poles in the finite plane.

सीमित समतल में अपने सभी ध्रुवों पर $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ के अवशेष निकालिए।

(b) Prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad (a>b>0)$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad (a>b>0)$$

5. (a) State and prove fundamental theorem of Algebra.

बीजगणित की मूलभूत प्रमेय को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

(b) Show that the series (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ are analytic continuations of each other.

दिखाइए कि श्रेणी (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ एक-दूसरे के विश्लेषिक सातत्य हैं।

6. (a) Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at origin although the Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूलबिन्दु पर विश्लेषित नहीं है यद्यपि यह उस बिन्दु पर कॉशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट करता है।

(b) If $f(z) = u + iv$ be an analytic function of $z = x + iy$, then prove that the families of curves $u = c_1$, $v = c_2$ are orthogonal to each other, where c_1 and c_2 are parameters.

यदि $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषित फलन है तो सिद्ध कीजिए कि वक्रों $u = c_1$, $v = c_2$ के परिवार एक-दूसरे के ऑर्थोगोनल हैं जहाँ c_1 तथा c_2 पैरामीटर हैं।

Section–B

(खण्ड–ब)

Short Answer Type Questions 3/4 each

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note :– Attempt any *five* questions. All questions carry equal marks.

किन्हीं **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

7\. (i) If z_1 and z_2 are two complex numbers, prove that $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ if and only if $z_1\bar{z}_2$ is purely imaginary.

यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ यदि और केवल यदि $z_1\bar{z}_2$ एक शुद्ध काल्पनिक संख्या है।

(ii) Expand $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ for (i) $0 < |z| < 1$ (ii) $|z| > 2$.

(i) $0 < |z| < 1$ (ii) $|z| > 2$ के लिए $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ का विस्तार कीजिए।

(iii) Verify whether the real and imaginary parts of $w = \sin z$ satisfy Cauchy-Riemann equations.

सत्यापित कीजिए कि $w = \sin z$ के वास्तविक एवं काल्पनिक हिस्से कॉशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट करते हैं अथवा नहीं।

(iv) Show that $w = iz + i$ maps plane $x > 0$ onto half plane $v > 1$.

सिद्ध कीजिए कि $w = iz + i$ का आधा समतल $x > 0$, आधे समतल $v > 1$ पर प्रतिचित्रित होता है।

(v) Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = 2$, $z_2 = i$ and $z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1$, $w_2 = i$ and $w_3 = -1$ respectively.

द्विरैखिक रूपान्तरण निकालिए जो बिन्दु $z_1 = 2$, $z_2 = i$ तथा $z_3 = -2$ को बिन्दु $w_1 = 1$, $w_2 = i$ एवं $w_3 = -1$ में क्रमागत प्रतिचित्रित करे।

(vi) Verify Cauchy's theorem for the function $5 \sin 2z$, if C is the square with vertices at $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

फलन $5 \sin 2z$ के लिए कॉशी प्रमेय को सत्यापित कीजिए, यदि C, शीर्ष $1 \pm i$, $-1 \pm i$ के साथ एक वर्ग हो।

(vii) Define the following :

(a) Singularity of an analytic function

(b) Pole

(c) Meromorphic function

(d) Analytic continuation

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

(अ) एक विश्लेषित फलन की विचित्रता

(ब) ध्रुव

(स) मेरोमोरफिक फलन

(द) विश्लेषिक सांतत्य

(viii) State the following theorems :

(a) Cauchy's residue theorem

(b) Rouche's theorem

(c) Laurent's theorem

(d) Liouville's theorem

निम्नलिखित प्रमेय लिखिए :

(अ) काँशी अवशेष प्रमेय

(ब) रोशे प्रमेय

(स) लोरेंट प्रमेय

(द) लियोविल प्रमेय

Section–C

(खण्ड–स)

Objective Type Questions 1 each

(वस्तुनिष्ठ उत्तरीय प्रश्न)

Note :– Attempt all questions.

सभी प्रश्न हल कीजिए।

8. (i) The radius of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ is :

(a) 0

(b) ∞

(c) 1

(d) None of these

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या है :

(अ) 0

(ब) ∞

(स) 1

(द) इनमें से कोई नहीं

(ii) Any function of x and y possessing continuous partial derivatives of first and second order is called a harmonic function if it satisfies :

(a) Euler's equation

(b) Laplace equation

(c) Lagrange's equation

(d) None of these

x तथा y के वे फलन जो प्रथम तथा द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलन रखते हों, हार्मोनिक फलन कहलाते हैं यदि ये फलन सन्तुष्ट करे :

(अ) यूलर की समीकरण

(ब) लाप्लास समीकरण

(स) लैग्रांज समीकरण

(द) इनमें से कोई नहीं

(iii) If L represents a square bounded by $x = \pm a$, $y = \pm a$, then the value of $\int_L \frac{dz}{z}$ is :

(a) πi

(b) $2\pi i$

(c) 0

(d) $2 \log a$

यदि L, $x = \pm a$, $y = \pm a$ द्वारा बन्धित एक वर्ग दर्शाता हो, तो $\int_L \frac{dz}{z}$ का मान होगा :

(अ) πi

(ब) $2\pi i$

(स) 0

(द) $2 \log a$

(iv) Number of poles of the function $f(z) = \tan \frac{1}{z}$ is :

(a) 2

(b) 4

(c) Infinite

(d) None of these

$f(z) = \tan \frac{1}{z}$ के ध्रुवों की संख्या है :

(अ) 2

(ब) 4

(स) अनन्त

(द) इनमें से कोई नहीं

(v) The value of $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ is :

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) 1

(d) –1

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ का मान है :

(अ) $\frac{\pi}{2}$

(ब) $\frac{\pi}{3}$

(स) 1

(द) –1