Total No. of Questions : 5] [Total No. of Printed Pages : 15

Paper Code : 10504

2086

B.A./B.Sc. (Part II) Examination, 2019

(Three-year Degree Course)

(New Course)

MATHEMATICS

Paper–I

(Linear Algebra and Matrices)

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 33/50

Note :– Attempt all Sections as directed.

निर्देशानुसार सभी खण्डों के उत्तर दीजिए।

Section–A

(खण्ड–अ)

Long Answer Type Questions 6/10 each

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note :– Solve all the *three* questions.

सभी तीन प्रश्न हल कीजिए।

https://www.mjpruonline.com

1. (a) Define vector space. Prove that the union of two-subspaces of a vector spaces is not necessarily a subspace.

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि दो उपसमष्टियों का संघ एक सदिश समष्टि है आवश्यक नहीं कि वह एक उपसमष्टि हो।

(b) For what values of m, the vector $(m, 3, 1)$ is a linear combination of the vectors $(3, 2, 1)$ and $(2, 1, 0)$?

m के किस मान के लिए सदिश $(3, 2, 1)$ और $(2, 1, 0)$ का सदिश $(m, 3, 1)$ एक रैखिक संचय है।

Or

(अथवा)

(a) Prove that the vectors $(1, 1, 0)$ $(3, 1, 3)$ and $(5, 3, 3)$ are linearly dependent.

सिद्ध कीजिए कि सदिश $(1, 1, 0)$ $(3, 1, 3)$ और $(5, 3, 3)$ रैखिक पराश्रित हैं।

(b) If V be the vector space of 2×2 symmetric matrix over R, show that the dim $V = 3$.

यदि समष्टि V, 2×2 सममिति आव्यूह R पर है, सिद्ध कीजिए कि dim $V = 3$.

2\. (a) If V is finite-dimensional and if W is a subspace of V, then W is finite-dimensional and prove that :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

यदि V परिमित-डायमेंशनल है और यदि W, V का एक सदिश उपसमष्टि है तब W परिमित डायमेंशनल है और सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

(b) Find the co-ordinate of the vector space $(2, 1, -6)$ of R^3 relative to the basis $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, where $\alpha_1 = \{1, 1, 2\}$, $\alpha_2 = \{3, -1, 0\}$, $\alpha_3 = \{2, 0, -1\}$.

https://www.mjpruonline.com

https://www.mjpruonline.com

R^3 के सदिश $(2, 1, -6)$ के आधार $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ की सापेक्ष निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ $\alpha_1 = \{1, 1, 2\}$, $\alpha_2 = \{3, -1, 0\}$, $\alpha_3 = \{2, 0, -1\}$.

Or

(अथवा)

(a) T_1 and T_2 be linear transformation on R^2 defined as follows :

$$T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

Show that :

$$T_1T_2 \neq T_2T_1$$

T_1 और T_2 रैखिक रूपान्तरण R^2 पर हो, जो निम्नानुसार परिभाषित है :

$$T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

https://www.mjpruonline.com

दिखाइए कि :

$$T_1T_2 \neq T_2T_1$$

(b) If T be an invertible linear transformation on vector space V(F), then show that :

$$T^{-1}T = I = TT^{-1}$$

यदि T एक इनवर्टिबिल रैखिक रूपान्तरण, समष्टि V(F) पर हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$T^{-1}T = I = TT^{-1}$$

3. (a) Two vectors x, y in real inner product space are orthogonal, then show that :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

दो सदिश x, y वास्तविक आन्तरिक उत्पाद स्थान में ऑर्थोगोनल हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(b) Find the rank of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Or

(अथवा)

(a) Solve the following equation by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि द्वारा हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(b) If $a + b + c = 0$, find the characteristic roots of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{bmatrix}$$

यदि $a + b + c = 0$, तो निम्नलिखित आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{bmatrix}$$

Section–B

(खण्ड–ब)

Short Answer Type Questions 2/3 each

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4. Attempt any *five* questions :

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) If $V = R^3(R)$, find a set of linearly independent vector of V which contains vector (1, 1, 1).

यदि $V = R^3(R)$ रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश V का एक समुच्चय ज्ञात कीजिए जो सदिश (1, 1, 1) में समाहित है।

(ii) Show that the mapping T defined by :

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta) \forall (\alpha, \beta) \in V_2(R)$$

is a T linear transformation.

प्रतिचित्रण T, $T(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta) \forall$ $(\alpha, \beta) \in V_2(R)$ के द्वारा परिभाषित होता है, तो दिखाइए कि T एक रैखिक रूपान्तरण है।

(iii) State and Bassel's inequality.

बेसेल्स का असमानता कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(iv) If x and y are orthogonal unit vectors, then find the distance between x and y.

यदि x और y एकक सदिश ऑर्थोगोनल हैं तो x और y के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(v) Find the dual basis of the basis set $B = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ for $V_3(R)$.

$V_3(R)$ के लिए आधार समुच्चय $B = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

https://www.mjpruonline.com

(vi) Find the symmetric matrix A corresponding to the quadratic form :

$q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$

द्विघातीय रूप $q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$ से सम्बन्धित सममित आव्यूह A को ज्ञात कीजिए।

(vii) Find characteristic equation and eigen values of a square matrix.

एक वर्ग आव्यूह के अभिलाक्षणिक समीकरण और आइगन मानों को परिभाषित कीजिए।

(viii) Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are real.

सिद्ध कीजिए कि हर्मीशियन आव्यूह के आइगन मान वास्तविक हैं।

https://www.mjpruonline.com

Section–C

(खण्ड–स)

Objective Type Questions 1 each

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5. Choose the correct answer :

सही उत्तर का चयन कीजिए :

(i) The vector space $V_3(R)$ is dimension :

(a) 1

(b) 3

(c) 2

(d) None of these

सदिश समष्टि $V_3(R)$ की डायमेन्शन है :

(अ) 1

(ब) 3

(स) 2

(द) इनमें से कोई नहीं

https://www.mjpruonline.com

(ii) If W_1 and W_2 are subspace of a vector space $V(F)$, then $(W_1 \cap W_2)^\circ$ is equal to :

(a) $(W_1^\circ + W_2^\circ)$

(b) $W_1^\circ \cup W_2^\circ$

(c) $W_1^\circ \cap W_2^\circ$

(d) None of these

यदि W_1 और W_2 समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि हैं, तो $(W_1 \cap W_2)^\circ$ का मान बराबर है :

(अ) $(W_1^\circ + W_2^\circ)$

(ब) $W_1^\circ \cup W_2^\circ$

(स) $W_1^\circ \cap W_2^\circ$

(द) इनमें से कोई नहीं

(iii) A real quadratic form in three variables is equivalent to the diagonal form $6y_1^2 + 3y_2^2 + 0.y_3^2$ then the quadratic form is :

(a) Positive definite

(b) Indefinite

(c) Positive semi-definite

(d) Negative

तीन चर में एक वास्तविक द्विघात रूप विकर्ण रूप $6y_1^2 + 3y_2^2 + 0.y_3^2$ के समतुल्य है, तो द्विघात रूप होगा :

(अ) सकारात्मक रूप से निश्चित

(ब) अनिश्चित

(स) सकारात्मक रूप से अर्द्ध-निश्चित

(द) नकारात्मक

https://www.mjpruonline.com

https://www.mjpruonline.com

(iv) The vectors $x, y \in V$ are said to be orthogonal, if (x, y) is equal to :

(a) 0

(b) 1

(c) −1

(d) 3

दो सदिश $x, y \in V$ ऑर्थोगोनल कहलाते हैं, यदि (x, y) बराबर है :

(अ) 0

(ब) 1

(स) −1

(द) 3

(v) If a matrix A has a non-zero minor of order 'r' then rank $\rho(A)$ will be :

(a) $= r$

(b) $< r$

(c) $> r$

(d) $\geq r$

https://www.mjpruonline.com

यदि आव्यूह A के पास ऑर्डर r का नॉन-जीरो माइनर हो, तो रैंक $\rho(A)$ होगा :

(अ) $= r$

(ब) $< r$

(स) $> r$

(द) $\geq r$