Paper Code : 10504

2086

B. A./B. Sc. (Part II)
EXAMINATION, 2018
(Three-year Degree Course)
(New Course)
MATHEMATICS
Paper First
(Linear Algebra and Matrices)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 33/50*

Note : Attempt all Sections as directed.

निर्देशानुसार सभी खण्डों को हल कीजिए।

Section—A 18/30

(खण्ड—अ)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Attempt all the *three* questions.

सभी तीन प्रश्नों को हल कीजिए।

1. (a) Define vector space. Show that the intersection of two subspaces of a vector space V is itself a subspace of V.

A-31

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि दो उपसमष्टियों का इंटरसेक्शन भी एक उपसमष्टि होगा।

(b) Examine whether the set of vectors (2, 3, –1), (–1, 4, –2), (1, 18, –4) is linearly independent or not in $V_3(R)$. — 5

परीक्षण कीजिए कि $V_3(R)$ में तीन सदिश (2, 3, –1), (–1, 4, –2), (1, 18, –4) रैखीय स्वतन्त्र हैं या नहीं।

Or

(अथवा)

(a) The linear span L(S) of any non-empty subset S of a vector space V over F is a subspace of V containing S.

एक सदिश समष्टि V(F) के किसी उपसमुच्चय S का रैखिक विस्तार L(S) V का एक उपसमष्टि होता है।

(b) Show that the set $S = \{(a + ib, c + id)\}$ is a basis set for C(R) if $bc - ad \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{(a + ib, c + id)\}$ समुच्चय C(R) के लिए आधार बनाता है, यदि $bc - ad \neq 0$ ।

2. If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space V(F), then :

(a) $W_1 + W_2$ is a subspace of V

(b) $W_1 + W_2 = \{W_1 \cup W_2\}$

i. e. $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$

यदि सदिश समष्टि V के दो उपसमष्टि W_1 एवं W_2 हैं, तब :

(अ) $W_1 + W_2$ V का उपसमष्टि है

(ब) $W_1 + W_2 = \{W_1 \cup W_2\}$

अर्थात् $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$

Or

(अथवा)

If W_1 and W_2 are finite dimensional subspaces of a vector V, then $W_1 + W_2$ is finite dimensional and :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

— 2

यदि W_1 एवं W_2 सदिश समष्टि V के दो उपसमष्टि W_1 एवं W_2 हैं, तब $W_1 + W_2$ एक परिमित विमीय है एवं :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

3. (a) Find the rank of matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

— 5

आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

का क्रम ज्ञात कीजिए।

(b) Show that all positive integral powers of a Hermitian matrix are Hermitian.

सिद्ध कीजिए कि हर्मीशियन आव्यूह की सभी धनात्मक पूर्णांक घात एक हर्मीशियन आव्यूह है।

Or

(अथवा)

(a) Find the value of K so that the system of equations :

$$2x + 3y + 4 = 0$$
$$3x + 4y + 6 = 0$$
$$4x + 5y - k = 0$$

is constant.

निम्नलिखित समीकरण :

$$2x + 3y + 4 = 0$$
$$3x + 4y + 6 = 0$$
$$4x + 5y - k = 0$$

k के किस मान के लिए कंसिस्टैण्ट हैं।

(b) Find A^{-1} by using Cayley-Hamilton theorem, where :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

कैली-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करते हुए A^{-1} निकालिए, जहाँ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$ – 3

Section—B

2/3 each

(खण्ड—ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4. *Attempt any five questions.*

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

(i) Show that the set $W = \{(x, y, 0) : x, y \in F\}$ is a subspace of $V_3(F)$.

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि $V_3(F)$ का समुच्चय $W = \{(x, y, 0) : x, y \in F\}$ एक उपसमष्टि है।

(ii) Let $S : R^3 \to R^2$ and $T : R^2 \to R^2$ be defined by $S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 + x_3)$ and $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Derive formulas defining the function TS and ST.

यदि $S : R^3 \to R^2$ एवं $T : R^2 \to R^2$ प्रदर्शित है $S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 + x_3)$ एवं $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ । TS एवं ST सूत्र निकालिए।

(iii) Define linear functionals.

रेखीय फलनक को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Cauchy-Schwarz's inequality.

कौशी-श्वार्ज असमानता को परिभाषित कीजिए।

(v) Define Bi-dual space.

बाइ-ड्युअल समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vi) If A is a square matrix, show that $A + A^*$ is Hermitian and $A - A^*$ is skew Hermitian.

यदि A वर्ग आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि $A + A^*$ एक हर्मीशियन आव्यूह है एवं $A - A^*$ एक स्क्यू हर्मीशियन आव्यूह है।

(vii) Find the characteristic roots of :

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$ – 3

आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

के अभिलाक्षणिक मान ज्ञात कीजिए।

(viii) Show that :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & -\frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{bmatrix}$$ – 3

सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & -\frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{bmatrix}$$

ऐकिक आव्यूह है।

Section—C　　1 each

(खण्ड—स)

Objective Type Questions

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5. Answer all questions.

सभी प्रश्नों को हल कीजिए।

(i) Let $V = R^3$ be a vector space of triples over R and let $W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in R\}$ and $W_2 = \{(0, 0, c) : c \in R\}$, then :

(a) W_1, W_2 are subspace of V

(b) $W_1 \subseteq W_2$

(c) $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V

(d) $W_2 \subseteq W_1$

यदि $V = R^3$ एक ट्रिपल सदिश समष्टि है एवं $W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in R\}$ एवं $W_2 = \{(0, 0, c) : c \in R\}$, तब :

(अ) W_1, W_2 उपसमष्टि हैं V के

(ब) $W_1 \subseteq W_2$

(स) $W_1 \cup W_2$ उपसमष्टि है V का

(द) $W_2 \subseteq W_1$

(ii) If W is a subspace of a finite dimensional vector space V, then :

(a) $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V$

(b) $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V + \dim W$

(c) $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim W$

(d) $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$

यदि एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V का W एक उपसमष्टि है, तब :

(अ) विमा $\left(\frac{V}{W}\right)$ = विमा V

(ब) विमा $\left(\frac{V}{W}\right)$ = विमा V + विमा W

(स) विमा $\left(\frac{V}{W}\right)$ = विमा W

(द) विमा $\left(\frac{V}{W}\right)$ = विमा V – विमा W

(iii) The kernel of the linear transformation

$$T : V \to W$$

is :

(a) Subset of V

(b) Subgroup of V

(c) Subfield of V

(d) Subspace of V

$T : V \to W$ एक रैखीय रूपान्तरण का कर्नेल है :

(अ) V का उपसमुच्चय

(ब) V का उपसमूह

(स) V का उपक्षेत्र

(द) V का उपसमष्टि

(iv) For all vector α, β in V, $\|\alpha + \beta\|^2$ is :

(a) $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

(b) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2$

(c) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2$

(d) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\beta\|^2$

सदिश समष्टि V के α, β सभी सदिशों के लिए $\|\alpha + \beta\|^2$ है :

(अ) $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

(ब) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2$

(स) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2$

(द) $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\beta\|^2$

(v) The square matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}$ is :

(a) Symmetric

(b) Skew-symmetric

(c) Hermitian

(d) Skew-hermitian

एक वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}$ है :

(अ) सममित

(ब) विषम-सममित

(स) हर्मीशियन

(द) विषम-हर्मीशियन